احاطه‌گری (۲)

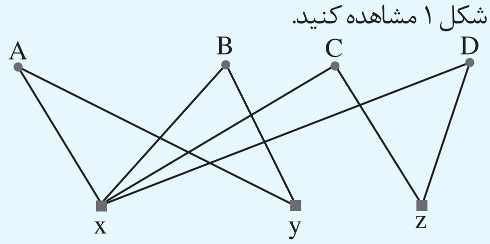
محمود نصیری
مؤلف کتاب‌های درس ریاضی

اشاره

قسمت اول مقالهٔ احاطه‌گری را در شمارهٔ ۱۳۳ مطالعه نمودید و در این شماره ادامهٔ مطلب را می‌خوانید:

گراف‌های دو بخشی و احاطه‌گری[۱]

نوعی از گراف‌ها که کاربردهای متعددی نیز دارند، گراف‌هایی هستند که مجموعهٔ رأس‌های آن به دو مجموعهٔ جدا از هم، قابل تفکیک هستند. فرض کنید رأس‌های x، y و z در یک گراف نشان‌دهندهٔ سه شغل متفاوت و رأس‌های A، B، C و D نشان‌دهندهٔ چهار فرد باشند که هر یک می‌توانند شغل‌هایی را اختیار کنند. مثلاً A و B فقط می‌توانند شغل‌های x و y، و C و D فقط می‌توانند شغل‌های x و z را اختیار کنند. می‌توانید نمایش آن را در شکل ۱ مشاهده کنید.



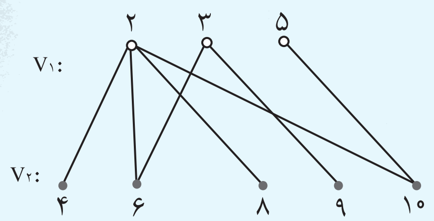
۱

آنچه در این نوع گراف‌ها اهمیت دارد آن است که مجموعهٔ رأس‌های $V_1=\{A,B,C,D\}$ و $V_2=\{x,y,z\}$ مجزا از هم هستند. یعنی هیچ یالی بین مجموعهٔ رأس‌های V_1 و همچنین هیچ یالی بین مجموعه رأس‌های V_2 وجود ندارد. به این معنی که افراد هیچ ارتباطی با هم ندارند و همچنین شغل‌ها نیز ارتباطی با هم ندارند. در اینجا ارتباط بین هر فرد و هر شغل مدنظر است. چنین گراف‌هایی را گراف‌های دو بخشی می‌نامند. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریف: یک گراف G حداقل از مرتبهٔ ۲ را یک گراف دوبخشی می‌نامند، هرگاه V(G) مجموعهٔ رأس‌های آن را بتوان به دو زیرمجموعهٔ غیرتهی و مجزای V_1 و V_2 افراز کرد؛ به‌طوری که هر یک از یال‌های G رأسی از V_1 را به رأسی از V_2 وصل کند.

V_1 و V_2 مجموعه‌های دوتایی (V_1, V_2) یا دو بخشی نامیده می‌شوند. ساده‌ترین گراف دوبخشی گراف $K_{1,1}$ یا همان K_2 است.

فرض کنیم: $V_1=\{۲,۳,۵\}$ و $V_2=\{۴,۶,۸,۹,۱۰\}$، اگر G گرافی باشد که:



۲

$V(G)=V_1 \cup V_2$

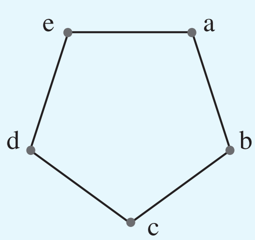
و

$E(G)=\{v_1v_2 \mid v_1\in V_1$ و $v_2\in V_2$ و v_2 بر v_1 بخش باشد$\}$

آیا G گراف دو بخشی است؟ آن را رسم کنید.

اکنون یک پرسش مهم مطرح است. آیا می‌توان هر گرافی را به یک گراف دو بخشی تبدیل کرد؟

گراف C_5 را درنظر می‌گیریم. آیا می‌توانید آن را به یک گراف دوبخشی تبدیل کنید.



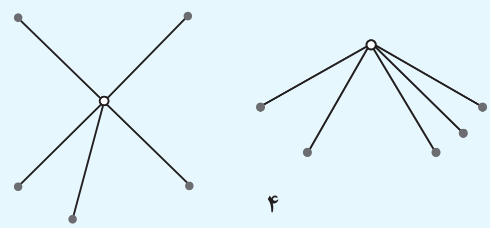
۳

مسلماً پاسخ منفی است. زیرا اگر: $a\in V_1$، آن‌گاه باید: $b,e\in V_2$ و سپس باید: $c,d\in V_1$. اما این امکان ندارد، زیرا بین c و d یالی وجود دارد. یا می‌توانیم به‌طور دوری در یک جهت حرکت کنیم: اگر $a\in V_1$، آن‌گاه باید: $b\in V_2$، سپس: $c\in V_1$ و: $d\in V_2$ و بالاخره باید $e\in V_1$ باشد. اما a و e_1 هر دو متعلق به V_1 می‌شوند که امکان ندارد. زیرا یالی بین آن دو وجود دارد. به‌طور کلی قضیهٔ زیر به سادگی ثابت می‌شود:

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه گراف G یک گراف دوبخشی باشد، آن است که شامل دور به طول فرد نباشد.

گراف دوبخشی کامل

گراف دوبخشی با بخش‌های (V_1,V_2) را گراف کامل دوبخشی می‌نامند، هرگاه هر رأس V_1 مجاور هر رأس V_2 باشد.



۴

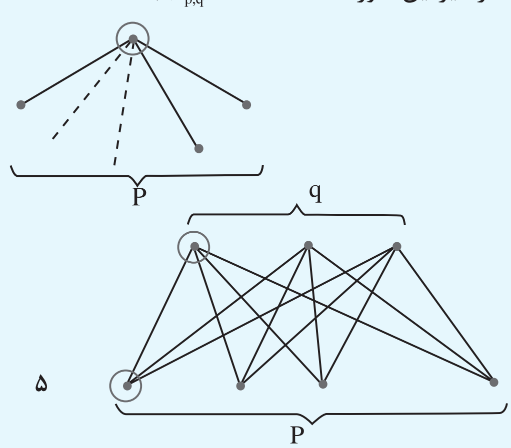
اگر $|V_1|=p$ و $|V_2|=q$، آن‌گاه این گراف کامل دوبخشی را به $K_{p,q}$ نشان می‌دهند. مثلاً $K_{1,p}$ یک ستاره است.

گراف دوبخشی و احاطه‌گری

تعیین مجموعهٔ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در گراف‌های دوبخشی مانند سایر گراف‌هاست، اما اگر گراف دوبخشی کامل باشد، به سادگی مشخص می‌شود. فرض کنیم G گراف دوبخشی $k_{p,q}$ باشد، به‌طوری که: $1\le q\le p$.

اگر: q=۱، آن‌گاه: $\gamma(k_{p,q})=1$

در غیر این صورت: $\gamma(k_{p,q})=2$



۵

اگر: $p\ge 2$ و $q\ge 2$، کافی است برای انتخاب مجموعهٔ احاطه‌گر فقط یک رأس از مجموعهٔ رأس‌های اولی و یک رأس از مجموعه رأس‌های دومی انتخاب کنیم. بنابراین مجموعه احاطه‌گر مینیمم دو عضوی است.

$$\gamma(k_{p,q})=\begin{cases} 1 & \min(p,q)=1 \\ 2 & \min\{p,q\}\ge 2 \end{cases}$$

اگر بتوانیم یک گراف را به یک گراف دوبخشی تبدیل کنیم، پیدا کردن مجموعه‌های احاطه‌گر ساده‌تر خواهد بود.

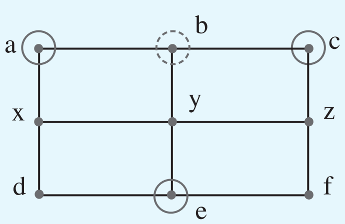
فرض کنیم kp,q یک گراف کامل دوبخشی باشد (شکل ۵). تعداد این مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم چندتاست؟ فرض کنیم: $p\ge q\ge 2$.

آیا پاسخ pq درست است؟ اگر: p=۱ یا q=۱ چگونه می‌شود؟ در هر کدام از این حالت‌ها تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال چقدر است؟ آیا ممکن است از pq بیشتر باشد؟ چرا؟ اگر p=۱ یا q=۱ چطور؟

فعالیت: گراف G مطابق شکل ۶ رسم شده است. مرتبهٔ گراف ۹ و ماکسیمم درجهٔ آن ۴ است. آیا S={a,b,c,e} یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟

به سادگی مثبت بودن پاسخ مشخص است. اکنون آیا S یک مجموعهٔ مینیمال G است؟

زیرمجموعهٔ محض S'=S-{b}={a,c,e} از S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. پس S مینیمال نیست. اکنون آیا



۶

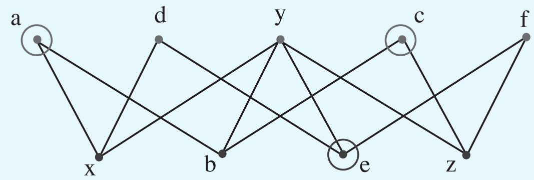
S' مینیمال است؟ آیا می‌توانید زیرمجموعه‌ای محض از S' پیدا کنید که مجموعه‌ای احاطه‌گر G باشد؟

اگر چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد، باید حداکثر دوعضوی باشد.

نشان خواهیم داد که هیچ مجموعهٔ دوعضوی نمی‌تواند یک مجموعهٔ احاطه‌گر این گراف باشد. اگر آن را به یک گراف دوبخشی مطابق شکل بعدی تبدیل کنیم، پاسخ به سادگی مشخص می‌شود. در هر گراف دوبخشی که هر بخش بیش از یک رأس دارد، هر مجموعه احاطه‌گر حداقل باید یک عضو از هر

یک از دوبخش داشته باشد. زیرا هیچ یک از رأس‌های هر بخش نمی‌تواند رأس‌های دیگر همان بخش را احاطه کند

پس اگر این گراف یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی داشته باشد، حتماً یکی باید از مجموعهٔ $S_1=\{a,d,y,c,f\}$ و دیگری از $S_2=\{x,b,e,z\}$ باشد. از مجموعهٔ S_1 فقط رأس y می‌تواند تمام رأس‌های S_1 را احاطه کند. پس y یک عضو این مجموعهٔ احاطه‌گر است. عضو دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر باید متعلق به S_2 باشد، اما اعضای S_2 همگی از درجهٔ ۳ و حداکثر مجاور سه رأس S_1 هستند.



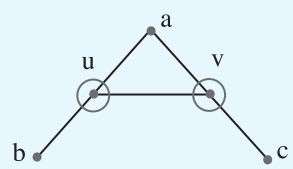
۷

در نتیجه دو عضو باقی‌ماندهٔ دیگر توسط هیچ رأسی احاطه نمی‌شوند. بنابراین هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی برای این گراف وجود ندارد.

ویژگی‌هایی از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

اکنون قضیهٔ مهمی را در مورد مجموعه‌های احاطه‌گر بیان می‌کنیم که در مورد گراف‌های بدون رأس منفرد است.

در گراف G شکل ۸ داریم که $V=\{a,b,c,u,v\}$، مشاهده می‌کنید که $S=\{u,v\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مینیمال است. اکنون مجموعهٔ $S'=V-S=\{a,,b,c\}$ مکمل S را درنظر بگیرید. آیا 'S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟



۸

به سادگی مشخص است که 'S نیز مجموعهٔ احاطه‌گر G است. این اتفاقی نیست و در حالت کلی نیز درست است. اکنون در قضیهٔ زیر آن را ثابت می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم G یک گراف با رأس غیرمنفرد باشد ($\delta(G)\geq 1$). اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G باشد، آن‌گاه $S'=V-S$ مکمل S، نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G و V مجموعهٔ رأس‌های G است.

اثبات: فرض کنیم $S\subseteq V$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف G باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم V-S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. آن را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم V-S مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشد. چون هر مجموعهٔ احاطه‌گر عضوهای خودش را احاطه می‌کند، پس اگر V-S احاطه‌گر نباشد، رأسی مانند v از S وجود دارد که توسط V-S احاطه نمی‌شود. بنابراین v مجاور هیچ رأسی از V-S نیست. اما S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. پس رأس V-S مجاور رأسی از S به جز v است. یعنی هر رأس V-S توسط رأسی از $S-\{v\}$ احاطه می‌شود. از طرف دیگر طبق فرض، v رأس منفرد G نیست. همچنین مجاور رأسی از V-S نیز نیست. پس باید مجاور رأسی از $S-\{v\}$ باشد. یعنی باید v نیز توسط $S-\{v\}$ احاطه شود. در نتیجه باید $S-\{v\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد. اما این با مینیمال بودن S متناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و V-S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

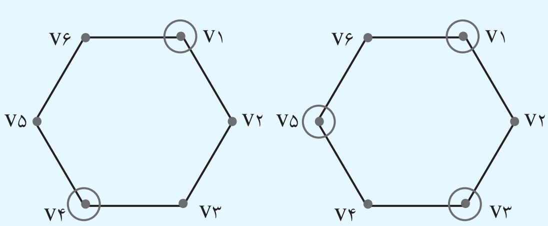
نتیجه: اگر G گرافی با رأس غیرمنفرد و V مجموعهٔ رأس‌های آن باشد، اگر S مجموعهٔ احاطه‌گر مینی‌مم G باشد، آن‌گاه V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

نتیجه: هر گراف همبند G از مرتبهٔ $n\geq ۲$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر دارد که مکمل آن V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

قضیهٔ بعدی نیز یک ویژگی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال است.

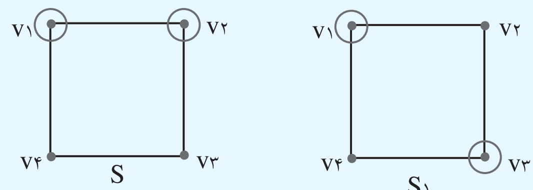
قضیه: گراف G مفروض است. اگر هر دو رأس در یک مجموعه احاطه‌گر S از G مجاور نباشند، آن‌گاه S لازم است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد، اما لزومی ندارد یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم باشد.

اثبات: فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد که هر دو رأس آن مجاور نباشند، پس در S هر رأس باید خود آن را احاطه کند. در نتیجه، به ازای هر رأس v از S، $S-\{v\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست. در نتیجه طبق تعریف، S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؛ یعنی لازم است مینیمال باشد، اما لزومی ندارد



۹

مینیمم باشد. $C_۶$ رادر نظر می‌گیریم. $S=\{v_۱,v_۳,v_۵\}$. در شکل ۹ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است و هیچ دو رأس آن مجاور هم نیستند. اما S مینیمم نیست، زیرا: $\gamma(G)=۲$ و $S_۱=\{v_۱,v_۴\}$ احاطه‌گر مینیمم است. **تذکر:** عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست. ممکن است S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد، اما رأس‌هایی در S مجاور هم باشند (شکل‌های ۱۰ را مشاهده کنید).



۱۰

مرور بر چند ویژگی مهم

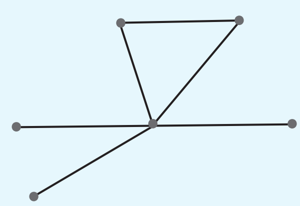
فرض کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد. می‌گوییم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G است، هرگاه، برای هر مجموعهٔ احاطه‌گر S_i از G داشته باشیم: $|S|\leq|S_i|$.

همچنین مشاهده کردیم:

> هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، اما عکس آن همواره درست نیست.

اگر G گراف از مرتبهٔ یک باشد، واضح است که خودش مجموعهٔ احاطه‌گر خودش است که هم مینیمم و هم مینیمال است و $\gamma(G)=۱$ که این یک حالت بدیهی است. تاکنون ویژگی‌های زیر را برای عدد احاطه‌گری بررسی کرده‌ایم:

۱. اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $۱\leq\gamma(G)\leq n$.
۲. $\gamma(G)=۱$، اگر و فقط اگر: $\Delta(G)=n-۱$.
۳. $\gamma(G)=n$، اگر و فقط اگر G گراف تهی از مرتبهٔ n باشد.
۴. اگر K_n گراف کامل از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $\gamma(K_n)=۱$.
آیا عکس این ویژگی درست است؟ یعنی اگر: $\gamma(G)=۱$، آیا G گراف کامل K_n است؟


۱۱

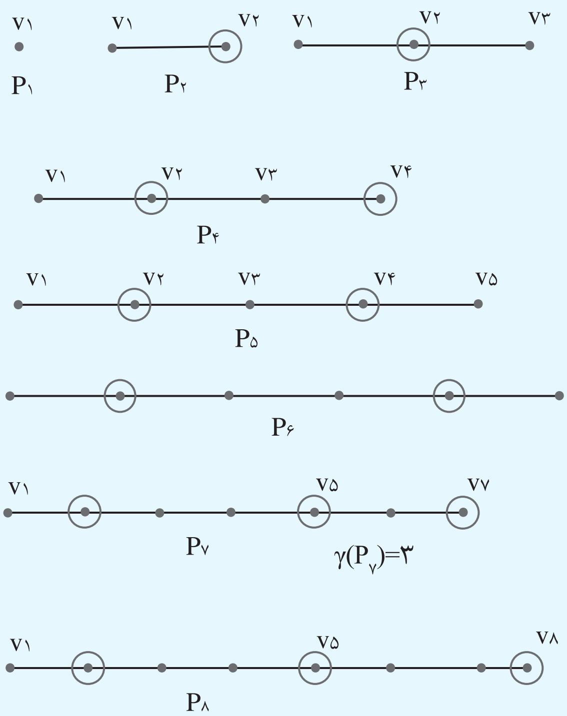
بنابراین، اگر: $\gamma(G)=۱$، با توجه به (۲) و (۴) (ویژگی‌های فوق) می‌توان گفت: گراف G حداقل یک رأس از درجهٔ n-۱ دارد. پس وقتی گراف کامل باشد، می‌تواند از n-۱ یال تا $\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال داشته باشد.

در حالت کلی تعیین عدد احاطه‌گری $\gamma(G)$ چندان ساده نیست، اما تعیین کرانه‌های بالا را بررسی می‌کنیم.

محاسبهٔ $\gamma(G)$ در بعضی گراف‌های خاص و کرانه‌هایی برای $\gamma(G)$

گراف‌های P_n و C_n و عدد احاطه‌گری

اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشد که رأس‌های آن $v_۱,v_۲,...,v_n$ برچسب گذاری شده باشند، به‌طوری که یال‌های آن

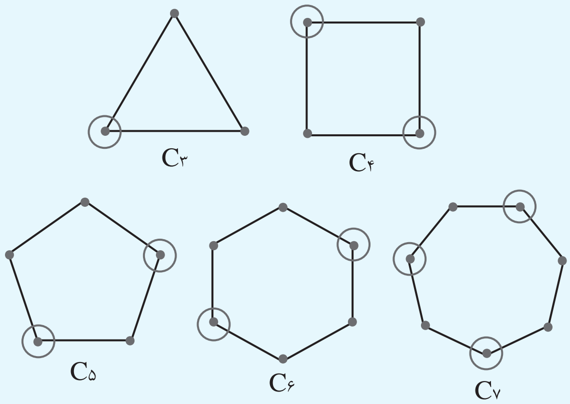


۱۲

$v_۱v_۲,v_۲v_۳,.....,v_{n-۱}v_n$ باشند و: $n\geq۱$، آن‌گاه گراف G را یک مسیر با n رأس می‌نامند و به P_n نشان می‌دهند.

حدس می‌زنیم، اگر: $n\geq۱$، آن‌گاه: $\gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$.

اگر رأس‌های گراف G از مرتبهٔ $n\geq۳$ با $v_۱$، $v_۲$،...،v_n برچسب‌گذاری‌شده باشند، به‌طوری که یال‌های آن، $v_۱v_۲,v_۲v_۳,.....,v_{n-۱}v_n$ باشند، آن‌گاه G را یک سیکل یا دور می‌نامند. یعنی یک مسیر بسته یک سیکل یا دور است.



۱۳

قضیه: $\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$، $n\geq۳$.

اثبات: $n=۳q+r$ که $۰\leq r\leq۲$.

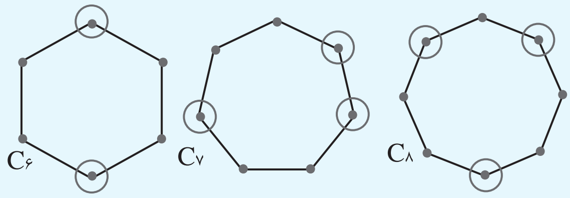
چون C_n دو منتظم اســت، هر رأس C_n دقیقاً سه رأس آن را احاطه می‌کند. بنابراین هر q رأس C_n حداکثر ۳q رأس آن را احاطه می‌کند. اگر: $r=۰$، در این صورت: $\gamma(C_n)\geq q=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$.

اگر $r=۱$ یا $r=۲$، آن‌گاه: $\gamma(C_n)\geq q+۱=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$.

اکنون باید نشـــان دهیم: $\gamma(C_n)\leq\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$ که $n=۳q+r$ و $۰\leq r\leq۲$.

ابتدا فرض کنیم $r=۰$. فرض کنیم S مجموعه‌ای شـــامل هر رأس v از C_n و هر ســـه رأس از C_n با شـــروع از v باشـــد که به‌طـــور دوری و همه در یک جهت روی C_n در نظر گرفته می‌شـــوند. بنابراین هر رأس C_n به وســـیلهٔ دقیقاً یک رأس از S احاطه می‌شـــود. چون S دقیقاً شـــامل q رأس است، داریم: $\gamma(C_n)\leq q=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$. سپس فرض کنیم: $r=۱$ یا $r=۲$.

اکنون فرض کنیم S مجموعه‌ای شامل هر رأس v از C_n و هر سه رأس C_n شروع از v به‌طور دوری در یک جهت باشد، تا در کل q+۱ رأس داشـــته باشیم. سپس، هر رأس C_n به وسیلهٔ حداقل یک رأس S احاطه شده است. بنابراین S یک مجموعهٔ



۱۴

احاطه‌گر C_n است و داریم: $\gamma(C_n)\leq q+۱=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$. در نتیجه: $\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$.

نتیجه: اگر در گراف C_n داشته باشیم: $n=۳k$، آن‌گاه:

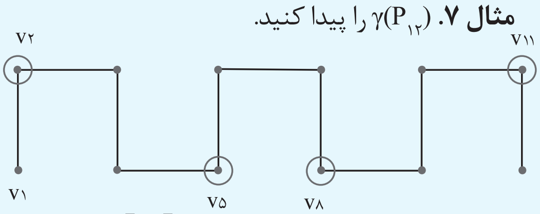
$$\left\lceil\frac{۳k}{۳}\right\rceil=k=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$$

به همین ترتیب،

$$n\geq۱،\ \gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$$

اگر: $n\geq۳$، آن‌گاه: $\gamma(P_n)=\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$

مثال ۷. $\gamma(P_{۱۲})$ را پیدا کنید.

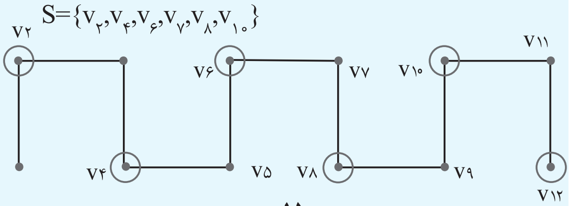


$$\gamma(P_{۱۲})=\left\lceil\frac{۱۲}{۳}\right\rceil=۴$$

$D=\{v_۲,v_۵,v_۸,v_{۱۱}\}$

یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و مینیمال است.

$S=\{v_۲,v_۴,v_۶,v_۷,v_۸,v_{۱۰}\}$



۱۵

شـــکل ۱۵ یک مجموعهٔ احاطه‌گر $P_{۱۲}$ اســـت که مینیمم نیست. $|S|=۶$، اما S مینیمال است، زیرا اگر هر رأس آن را حذف کنیم مثلاً، $S-\{v_۲\}$ دیگر احاطه‌گر نیست.

اکنون قضیهٔ مهمی را که در مورد کران بالای عدد احاطه‌گری و به قضیهٔ «ORE» معروف است، بیان می‌کنیم:

قضیه: اگر G گرافی از مرتبـــهٔ n و $\delta(G)\geq۱$ (رأس منفرد نداشته باشد) آن‌گاه $\gamma(G)\leq\left\lceil\frac{n}{۲}\right\rceil$.

اثبات: در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G باشد که: $\delta(G)\geq۱$، آن‌گاه V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

حال اگـــر D یک مجموعـــهٔ احاطه‌گر مینیمم G باشـــد، مینیمال نیز هســـت. پس V-D نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است و: $|V-D|\geq|D|=\gamma(G)$. در نتیجه:

$$n=|D|+|V-D|\geq 2|D|=2\gamma(G)\Rightarrow \gamma(G)\leq \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma(G)\leq \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$$

شفر و وایل[۲] در سال ۱۹۸۹ نشان دادند که اگر: $\delta(G)\geq 2$، آن‌گاه: $\gamma(G)\leq \frac{2n}{5}$. همچنین، **رید**[۳] در سال ۱۹۹۶ نشان داد، اگر: $\delta(G)\geq 3$، آن‌گاه: $\gamma(G)\leq \frac{3n}{8}$.

نتیجهٔ ۱: اگر G و $\bar{G}$ هر دو بدون رأس منفرد باشند، آن‌گاه: $\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n$

$$\gamma(G)\leq \frac{n}{2} \text{ و } \gamma(\bar{G})\leq \frac{n}{2}\Rightarrow \gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n$$

اگر G دارای یک رأس منفرد باشد، آن‌گاه: $\gamma(\bar{G})=1$. چرا؟ و: $\gamma(G)\leq n$، در نتیجه: $\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n+1$.

به همین ترتیب اگر $\bar{G}$ یک رأس منفرد داشته باشد، آن‌گاه: $\gamma(G)=1$ و $\gamma(\bar{G})\leq n$. در نتیجه: $\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n+1$.

نتیجهٔ ۲. اگر G گرافی ناهمبند باشد، آن‌گاه: $\gamma(\bar{G})\leq 2$.

اکنون مهم‌ترین قضیهٔ این قســمت را که کرانی بالا و هم کرانی پایین برای عدد احاطه‌گری ارائه می‌دهد، برای هر گراف از مرتبهٔ n که $n\geq 2$ بیان می‌کنیم.

قضیه. اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشــد کــه: $n\geq 2$، آن‌گاه:

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-\Delta(G)$$

اثبات: اگر $\deg(v)$، درجهٔ رأس v از گراف G باشد، واضح است که رأس v، به تعداد $1+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند. اگر v چنان انتخاب شده باشد که $\deg(v)=\Delta(G)$، آن‌گاه v، $1+\Delta(G)$ رأس G را احاطه می‌کند، به‌جز $n-(1+\Delta(G))$ رأس G که باقی می‌مانند.

چون هیچ‌کدام از $n-(1+\Delta(G))$ رأس G به وسیلهٔ v احاطه نمی‌شوند، پس حداکثر خودشــان احاطه می‌شوند، در نتیجه G حداکثر به‌وسیلهٔ $(n-(1+\Delta(G)))+1=n-\Delta(G)$ رأس احاطه می‌شود یعنی،

$$\gamma(G)\leq n-\Delta(G)$$

برای اثبات قسمت دیگر نامســاوی، فرض کنیم $\gamma(G)=k$، یعنی $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G باشــد. چون هر رأس v_i به تعداد $1+\deg(v_i)$ رأس G را احاطه می‌کند که $1\leq i\leq k$ و رأس‌های S همهٔ n رأس G را احاطه می‌کنند پس:

$$\sum_{i=1}^{k}(1+\deg(v_i))\geq n$$

اما به ازای هر i که $1<i<k$، $1+\deg(v_i)<1+\Delta(G)$ در نتیجه:

$$n\leq \sum_{i=1}^{k}(1+\deg(v_i))\leq k(1+\Delta(G))$$

بنابراین:

$$n\leq k(1+\Delta(G))\Rightarrow \frac{n}{1+\Delta(G)}\leq k$$

یعنی:

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-\Delta(G)$$

نتیجهٔ ۱. اگر G گرافی k منتظم باشــد، آن‌گاه: $\Delta(G)=k$.

بنابراین: $\left\lceil \frac{n}{1+k}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-k$

نتیجهٔ ۲. با توجه بــه قضیهٔ «اور» و قضیــهٔ قبلی، اگر: $\delta(G)\geq 1$، آن‌گاه: $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$

بنابراین در هر گرافی که هیچ رأس منفرد نداشــته باشد، آن‌گاه $\gamma(G)$ بزرگ‌تر از $\frac{n}{2}$ نیست.

حالت‌های تساوی در رابطه‌های فوق

۱. برای هر عدد صحیح و نامنفی n گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=n-\Delta(G)$. در حالتی که G همبند نباشد و در حالتی که G همبند باشد، آن را نشان دهید.

پاسخ: گــراف G را چنان درنظر می‌گیریم که شامل یک ســتاره باشــد؛ یعنی یک رأس که به r رأس دیگر وصل شده باشد: $r\leq n-2$. سپس کافی است $n-(r+1)$ رأس منفرد دیگر در نظر بگیریم.

اکنون، $r+1$ رأس توســط یک رأس v احاطه شــده‌اند که $r=\Delta(G)$ و $n-(r+1)$ رأس منفرد دیگر توسط خودشان احاطه شده‌اند. پس:

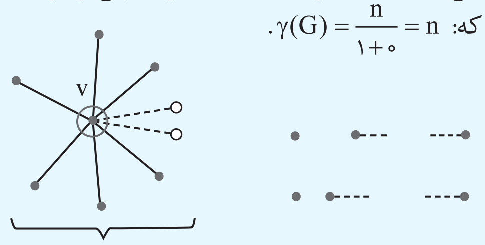
$$\gamma(G)=1+(n-r-1)=n-r=n-\Delta(G)$$

اگر گراف G همبند باشد، چگونه آن را پیدا می‌کنید؟

اگر گراف G از مرتبهٔ n باشد که: $\Delta(G)=n-1$، آن‌گاه:

$$\gamma(G)=\gamma(K_n)=n-(n-1)=1=n-\Delta(G)$$

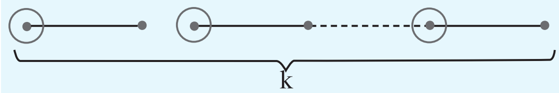
واضح اســت که اگر: $\Delta(G)=0$، گــراف تهی از مرتبهٔ n را داریم که: $\gamma(G)=\frac{n}{1+0}=n$.



۱۶

۲. گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن $\gamma(G)=\left\lfloor \frac{n}{۲}\right\rfloor$.

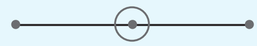
پاسخ: فرض کنید n زوج باشد. پس: n=۲k که k≥۱ عددی طبیعی است. در این صورت گراف G را شامل k مؤلفهٔ گراف $K_۲$ در نظر می‌گیریم. در این گراف داریم: $\delta(G)=\Delta(G)=۱$ و هر رأس در هر مؤلفه، آن مؤلفه را احاطه می‌کند. پس: $\gamma(G)=k=\frac{n}{۲}$ و واضح است که: $\frac{n}{۲}=\frac{n}{۱+\Delta(G)}$.



۱۷

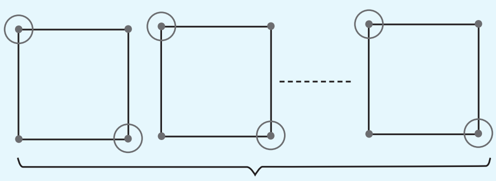
اگر n فرد باشد، داریم: n=۲k+۱. پس کافی است یکی از مؤلفه‌ها را به یک مسیر به طول ۲ تبدیل کنیم که در این حالت نیز در تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر، تغییری حاصل نمی‌شود. $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{۲k+۱}{۲}\right\rfloor=k=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$

$$\gamma(G)=\left\lfloor\frac{۲k+۱}{۲}\right\rfloor=k=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$$



اگر: n=۴k، می‌توانیم k گراف $C_۴$ را رسم کنیم که:

$$\gamma(G)=۲k=\frac{n}{۲}\Rightarrow\gamma(G)=\frac{n}{۲}$$


۱۸

k تا $c_۴$

اکنون حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم.

برای هر n صحیح و مثبت چگونه گرافی همبند بسازیم که در آن: $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$؟

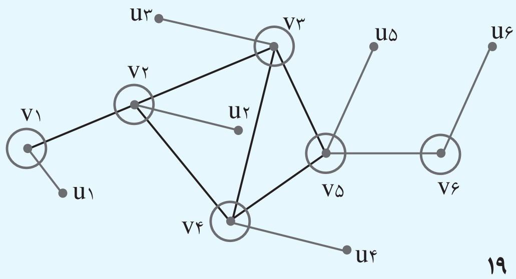
فرض کنیم n≥۲ عددی زوج باشد؛ یعنی: n=۲k.
فرض کنیم H گرافی همبند از مرتبهٔ k باشد، به‌طوری که:

$$V(H)=\{v_۱,v_۲,\dots,v_k\}$$

گراف جدید H^* را بر پایهٔ گراف H به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$V(H^*)=V(H)\cup\{u_۱,u_۲,\dots,u_k\}$$
$$E(H^*)=E(H)\cup\{u_iv_i|i=۱,۲,\dots,k\}$$

یعنی رأس‌های H^* اجتماع رأس‌های H و k رأس دیگر است که هر یک به u_i نشان داده شده‌اند و یال‌های H^*، اجتماع یال‌های H و یال‌هایی هستند که شامل دو رأس v_i و u_i می‌شوند. در این صورت گراف H^* را «تاج گراف H»[8] می‌نامند.



۱۹

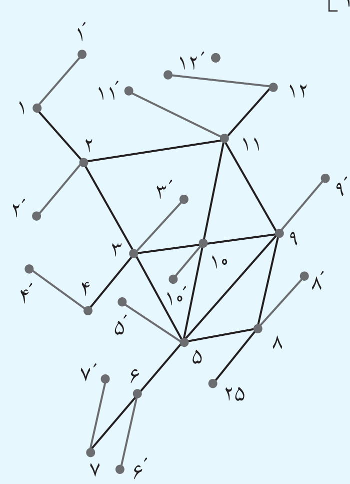
در شکل ۱۹، گراف H با مجموعهٔ رأس‌های $\{v_۱,v_۲,\dots,v_۶\}$ و گراف H^* با مجموعهٔ رأس‌های $V(H)\cup(u_۱,u_۲,\dots,u_۶\}$ را مشاهده می‌کنید. همچنین نشان داده شده است که چگونه یال‌های H به ۶ رأس جدید وصل شده‌اند.

به ازای هر گراف همبند H همواره گراف تاج H، یعنی H^* نیز گرافی همبند است؛ چرا؟

جالب‌ترین ویژگی در مورد H^* این است که: $\gamma(H^*)=k=\frac{n}{۲}$.

اگر n عددی فرد باشد، گراف H^* را از مرتبهٔ n-۱ می‌سازیم. سپس یک رأس جدید w را به H^* اضافه و آن را به رأسی از H متصل می‌کنیم. اکنون پرسش اصلی این است که چرا همواره: $\gamma(H^*)=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$؟

استدلال آن چندان مشکل نیست. اگر n زوج باشد، گراف همبند H از مرتبهٔ $\frac{n}{۲}$ را به دلخواه روی $\frac{n}{۲}$ رأس در نظر می‌گیریم. حال گراف H هر مجموعهٔ احاطه‌گری که داشته باشد، داریم: $\gamma(H)\le —$. حتی چون همبند است، بنابر قضیهٔ «اور» داریم: $\gamma(H)\le\left\lfloor\frac{n}{۴}\right\rfloor$. اما این در اثبات مهم نیست.



۲۰

اکنون وقتی $\frac{n}{۲}$ رأس دیگر را به H اضافه می‌کنیم و گراف جدید H^* را می‌سازیم، هر رأس H که رأس احاطه‌گر است، همچنان احاطه‌گر H^* هم خواهد بود. اما هر رأس H که رأس احاطه‌گر نباشد نیز باید به رأس احاطه‌گر تبدیل شود. یا اگر آن را در نظر نگیریم، رأس جدید اضافه‌شده باید به رأس احاطه‌گر تبدیل شود. در نتیجه، دقیقاً: $\gamma(H^*)=\frac{n}{۲}$.

حال اگر n فرد هم باشد، روند فوق را برای n-۱ رأس که تعداد آن‌ها زوج است، انجام می‌دهیم. سپس یک رأس باقی‌مانده را به یکی از رأس‌های H متصل می‌کنیم که احاطه‌گر است. پس در تعداد عضوهای مجموعه احاطه‌گر تأثیری ندارد. بنابراین در این حالت نیز داریم:

$$\gamma(H^*)=\frac{n-۱}{۲}=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$$

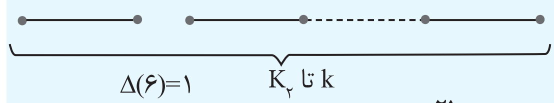
پس به‌طور کلی: $\gamma(H^*)=\left\lfloor\frac{n}{۲}\right\rfloor$.

۳. برای هر عدد صحیح و نامنفی n گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=\left\lceil\frac{n}{۱+\Delta(G)}\right\rceil$. همچنین گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=\frac{n}{۱+\Delta(G)}$.

پاسخ: همان k مؤلفه $k_۲$ می‌تواند مثالی باشد که: n=۲k؛ یعنی n زوج است.

اگر n فرد باشد G چگونه است؟

$$\gamma(G)=\frac{n}{۱+۱}=\frac{n}{۲}=k$$



۲۱

یا:

$$\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{۱+۲}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$$

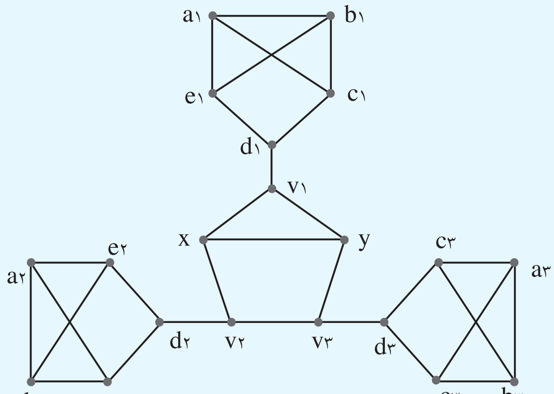
مثال ۸. گراف سه منتظم G از مرتبهٔ ۲۰ در شکل ۲۲ رسم شده است. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به شکل ۲۳، مجموعهٔ رأس‌های $\{a_۱,a_۲,a_۳\}$، ۱۲ رأس را مطابق شکل احاطه می‌کنند. اکنون فقط رأس‌های $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$، x، y، $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ باید توسط رأس‌هایی احاطه شوند. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که مجموعهٔ $D=\{a_۱,a_۲,a_۳,v_۱,v_۲,v_۳\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

در نتیجه: $\gamma(G)\leq۶$.

از طرف دیگر، بنا بر قضیهٔ قبل:

$$\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۲۰}{۴}\right\rceil=۵$$

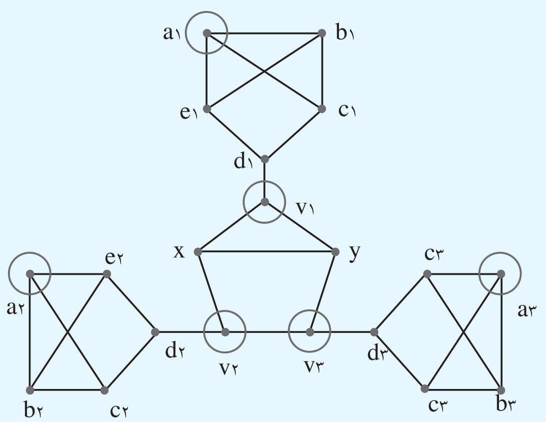


۲۲

پس: $۵\leq\gamma(G)\leq۶$.

اکنون کافی است نشان دهیم $\delta(G)=۵$ امکان ندارد.

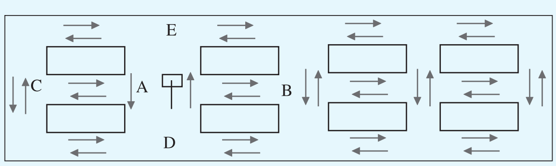
اگر مجموعهٔ $A=\{a_۱,b_۱,c_۱,d_۱,e_۱\}$ را در نظر بگیریم، $AU\{v_۱\}$ حداقل باید به‌وسیلهٔ دو رأس احاطه شوند، که همین به ترتیب باید برای دو زیرگراف مشابه نیز برقرار باشد. در نتیجه حداقل باید $\gamma(G)$ برابر ۶ باشد که با توجه به: $\gamma(G)\leq۶$، نتیجه می‌گیریم: $\gamma(G)=۶$.



۲۳

یک مثال کاربردی

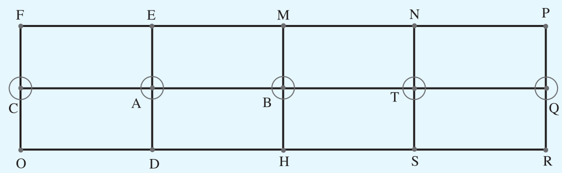
مثال ۹. در شکل ۲۴ شهرکی نشان داده شده که دارای سه خیابان افقی و پنج خیابان عمودی است. برای ایمنی شهرک می‌خواهیم در بعضی تقاطع‌ها دوربین‌هایی نصب کنیم. هر دوربین در هر تقاطع می‌تواند خود آن تقاطع و تقاطع‌های مجاورش را پوشش دهد.



۲۴

مثـــلاً دوربین تقاطع A می‌تواند چهار تقاطع B، C، D و E را پوشش دهد. تعیین کنید دوربین‌ها در چه تقاطع‌هایی نصب شـــوند تا تمام پانزده تقاطع تحت‌پوشش دوربین‌ها باشند و در ضمن از کمترین تعداد دوربین استفاده شود.

پاسخ: بـــرای پاسخ به مسئله ســـعی می‌کنیم تقاطع‌ها و خیابان‌های متصل به آن‌ها را با یک گراف G مدل‌سازی کنیم. در گراف رسم‌شـــده در شـــکل ۲۵، رأس‌ها، تقاطع‌ها و یال‌ها خیابان‌های منتهی به این تقاطع‌ها هستند.

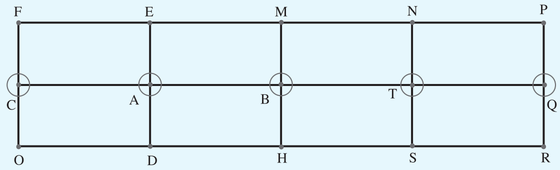


۲۵

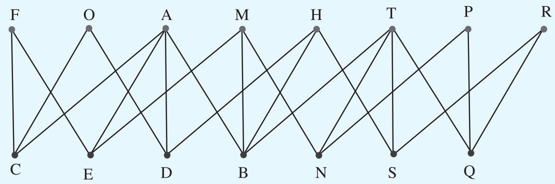
شاید اولین نقاطی که برای نصب دوربین به ذهن برسند، تقاطع‌های C، A، B، T و Q باشـــند که در این صورت، به پنج دوربین نیاز است. واضح است که تمام چهارراه‌ها تحت پوشش واقع می‌شوند، آیا این تعداد کمترین تعداد است؟ آیا می‌توانیم تغییری در نصب دوربین‌ها بدهیم تا به کمتر از ۵ دوربین نیاز باشد؟

این گراف دارای پانزده رأس اســـت و حداکثر درجهٔ رأس در آن ۴ اســـت. فقط ســـه رأس از درجهٔ ۴، هشـــت رأس از درجهٔ ۳ و چهار رأس از درجهٔ ۲ داریم. با اســـتفاده از فرمول کرانه‌های $\gamma(G)$ چون همبند است: $\left\lceil \frac{۱۵}{۱+۴} \right\rceil \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{۱۵}{۲} \right\rfloor$. پس: $۳\le\gamma(G)\le۷$. اما یک مجموعهٔ احاطه‌گر پنج عضوی برای آن به ســـادگی مشخص می‌شـــود؛ پس: $۳\le\gamma(G)\le۵$. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که هیچ کدام از رأس‌های درجهٔ چهار نمی‌تواننـــد هیچ‌کدام از رأس‌های درجهٔ دو را احاطه کنند. به همین دلیل رأس C را آزمایش می‌کنیم. رأس C سه رأس A، F، و O و خودش را احاطه می‌کند. اکنون اگر دو رأس M و H را انتخاب کنیم، مشاهده می‌کنیم که فقط چهار رأس P، Q، R و T می‌مانند که توسط هیچ رأسی احاطه نشده‌اند. اگر رأس Q را انتخاب کنیم، این مشـــکل هم حل می‌شود و در نتیجه یک مجموعهٔ احاطه‌گر چهار عضوی بـــرای G پیدا کرده‌ایم. بنابراین: $۳\le\gamma(G)\le۴$.

اکنون فقط کافی است نشـــان دهید $\gamma(G)=۳$ نیز امکان نـــدارد. به این منظور بهتر اســـت از تبدیل این گراف به یک گراف دوبخشی استفاده کنیم. آن را رسم کرده‌ایم. در نتیجه: $\gamma(G)=۴$.



۲۶



۲۷

کافی اســـت دوربین‌ها در تقاطع‌های C، M، H و Q نصب شوند. آیا نصب این چهار دوربین به روشی دیگر امکان دارد؟

چند ویژگی جدید در احاطه‌گری

$$۳\le\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\le n+۱ \qquad (n\ge۲)$$

$$\delta(G) \ge k \ge ۴ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{kn}{۳k-۱}$$

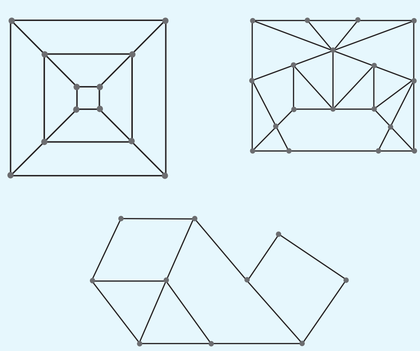
k>۷ (Caro Roditty 1990)

k=۴ (Sohn and Yuan 2009)

k=۵ (Xing, Sun and Chen 2006)

k=۶ (Cao, Shi Sohn and Yuan 2008)

مثال ۱۰. در شکل‌های زیر عدد احاطه‌گری را پیدا کنید.


۲۸

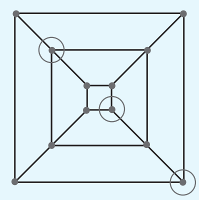
پاسخ:

$n=۱۲ \qquad \Delta(G)=۳$

$$۳=\left\lceil \frac{۲۱}{۴} \right\rceil \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor = ۶$$

$$\gamma(G)\ge ۳ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{۳n}{۸} = \frac{۳\times۱۲}{۸} = ۴/۵$$

$۳\le\gamma(G)\le۴ \quad , \quad \gamma(G)=۳$

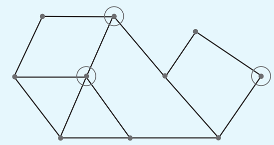


۲۹

$|v|=۱۰ \qquad \Delta(G)=۴$

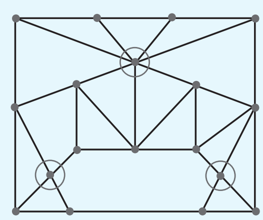
$$۲ = \frac{۱۰}{۱+۴} \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{۱۰}{۲} \right\rfloor = ۵ \;\;,\;\; ۲\le\gamma(G)\le۵$$

$$\delta(G) \ge ۲ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{۲\times۱۰}{۵} = ۴ \Rightarrow ۲ \le \gamma(G) \le ۴$$



۳۰

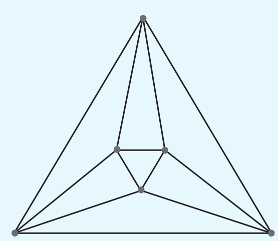
$$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{۱۶}{۱+۶} \right\rceil = ۳$$



۳۱

چند مسئله

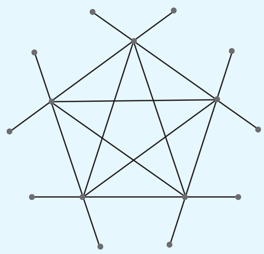
۱. در گـــراف ۳۲ $\gamma(G)$ چند اســـت؟ چـــه تعداد مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۳۲

۲. اگر G گرافی ناهمبند باشد، چرا: $\gamma(\overline{G})\le۲$.

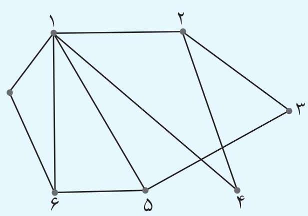
۳. در گراف شـــکل ۳۳ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با کمترین عضو و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشـــترین عضو پیدا کنید.



۳۳

۴. آیا تعریف زیر از مجموعهٔ احاطه‌گر می‌تواند درست باشد؟ گراف $G(V,E)$ مفروض است. $D\subseteq V$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر G می‌نامیم، هرگاه، برای $v\in V$، یا $v\in D$ یا $N_G(v)\cap D\neq\varnothing$.

۵. $D_C\subseteq V(G)$ را یـــک مجموعهٔ احاطه‌گر همبند گراف G می‌نامیم، هرگاه هر رأس $V\text{-}D_C$ مجاور رأســـی از D_C باشـــد و زیرگراف D_C از G همبند باشد. اکنون در گراف شکل ۳۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر همبند و یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرهمبند پیدا کنید، به‌طوری‌که هر دو احاطه‌گر مینی‌مم باشند.



۳۴

پی‌نوشت‌ها

1. Bipartite Graphs
2. Shephered & White
3. Reed
4. Corona of H

منابع

1. Haynes, Teresa W.; Jedetniemi, Stephen T.: Sater, Peter J. (1998). Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, Ine. NewYork.
2. Balakishnan, R & Rangannthan, K. (2000). A text book of graph theory springer. Springer-verlag, NewYork.
3. Aldous, Joan M. & Wilson, Robin J. (2000). Graphs and applications. Springer-verlag, London.